

4)  $\Rightarrow b = -c$   
 5)  $\Rightarrow 2a = b - c = -c - c = -2c$

Then  $\langle a \rangle^+ = -ca^3 + ca^2 + ca + d$ . There are three possibilities for  $c$ , three for  $d$ :  $\langle a \rangle^+ = 3 \times 3 = 9$ .

P.T.O.

4) a) Suppose  $x \in K$ . Then  $x \leq 0$  or  $0 \leq x$ . If  $0 \leq x$  then  $x \in M$ . If  $x \leq 0$  then  $x - x \leq -x$

so either  $x \in M$  or  $-x \in M$ . If  $x = 0$  then  $0 \leq x$  and  $0 \leq -x$  so both  $x$  and  $-x \in M$ .

b) If  $x \in M$  then  $0 \leq x \Rightarrow$   
 If  $-x \in M$  then  $0 \leq -x$

$0 \leq -x \Rightarrow 0 \leq x - x = 0$   
 so  $0 \leq x$  and  $0 \leq 0$ . From 3) of the defn of an ordered field,  $x = 0$

If  $x \neq 0$  then either  $x < 0$  or  $x > 0$   
 If  $x < 0$  then  $x \notin M$   
 If  $x > 0$  then  $x \in M$  but  $x - x > -x$   
 so  $0 > -x$  so  $-x \notin M \Rightarrow x, -x \in M$  if  $x \neq 0$ .

c)  $x, y \in M$ , then  $x, y \geq 0$

by 5)  $0 \leq x + 0 \leq x + y$  so  $x + y \in M$

Suppose  $x \geq y \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq y^2$

Suppose  $y \geq x \geq 0, x \geq 0 \Rightarrow xy \geq x^2$   
 $\therefore xy \geq 0 \Rightarrow x^2, y^2 \geq 0$   
 $\therefore xy \geq 0 \Rightarrow xy \in M$ .

d) There are three cases to consider

1)  $x, y \geq 0$  which ordering? No need to distinguish these cases  
 $x \leq_1 y \Rightarrow -x + x \leq_1 y - x \Rightarrow 0 \leq_1 y - x \Rightarrow y - x \in M_1$   
 $x \not\leq_2 y \Rightarrow -x + x \not\leq_2 y - x \Rightarrow 0 \not\leq_2 y - x \Rightarrow y - x \notin M_2$   
 $\Rightarrow M_1 \neq M_2$

2)  $x, y \leq 0$

$x \leq_1 y \Rightarrow -x + x \leq_1 y - x \Rightarrow 0 \leq_1 y - x \Rightarrow y - x \in M_1$   
 $x \not\leq_2 y \Rightarrow -x + x \not\leq_2 y - x \Rightarrow 0 \not\leq_2 y - x \Rightarrow y - x \notin M_2$   
 $\Rightarrow M_1 \neq M_2$

3)  $x \leq 0, y \geq 0$  (the case  $x \geq 0, y \leq 0$  is very similar)

$x \leq_1 y \Rightarrow x + x \leq_1 y - x \Rightarrow 0 \leq_1 y - x \Rightarrow y - x \in M_1$   
 $x \not\leq_2 y \Rightarrow x + x \not\leq_2 y - x \Rightarrow 0 \not\leq_2 y - x \Rightarrow y - x \notin M_2$