Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

MATEMATICA HL

Trabajo 1

Tipo I

"Investigación sobre parábolas."

VALENTINA DE MARINO

INGENIERÍA IB

Nº DE CANDIDATO:

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

De Marino, Valentina
Ingeniería IB

Trabajo 1 – Tipo I
Índice:

Introducción. 3

Desarrollo del trabajo. 4

Apartado 1. 4

Apartado 2. 5

A = 1 5
A = 2 7
A = 3 9
A = $\sqrt{2}$ 10
A = ½ 12

Apartado 3. 14

Apartado 4. 16

Apartado 5. 17

Apartado 6. 21

Bibliografía 22

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Introducción.

El trabajo planteado consiste en una investigación sobre parábolas. Por esta misma razón voy a comenzar definiendo lo que es una parábola y de donde surge esta.

Definición:
"[redacted]"[1]
[2]

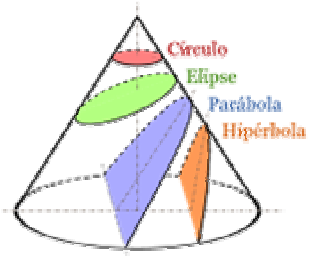


Ilustración 1 - Secciones cónicas.

La parábola se puede encontrar en muchas ciencias, debido a que las gráficas de ecuaciones cuadráticas son parábolas. Además, las parábolas aparecen en diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Aclaración:

Para este trabajo, las cifras significativas van a ser 2 (dos), porque el Programa IB así lo requiere en algunos de sus otros exámenes de Matemática.
Por otra parte, cada línea en las gráficas esta distinguida con un color diferente.

- Las parábolas, en rojo.
- Y = X, en magenta.
- Y = 2X, en negro.

El software utilizado en todo el trabajo es Graphmatica y el editor de ecuaciones de Microsoft Word.

---

1 VALIENTE BARDERAS, Santiago. Diccionario de Matemáticas. Pearson 1998. Página 185.
2 http://es.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1bola_(matem%C3%A1tica)

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Desarrollo del trabajo.

Apartado 1.

Considere la parábola $y = (x - 3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$ y las rectas $y = x$ e $y = 2x$.

- Utilizando medios tecnológicos, halle las cuatro intersecciones que se muestran en el dibujo.

- Rotule los valores correspondientes a la coordenada x de estas intersecciones como x_1, x_2, x_3 y x_4 en el orden en el que aparecen, de izquierda a derecha, a lo largo del eje x.
- Halle los valores de $x_2 - x_1$ y de $x_4 - x_3$ y denomine a estos valores S_L y S_R respectivamente.
- Finalmente, calcule $D = |S_L - S_R|$

Para poder trabajar con las intersecciones de la gráfica, debo definir que es.

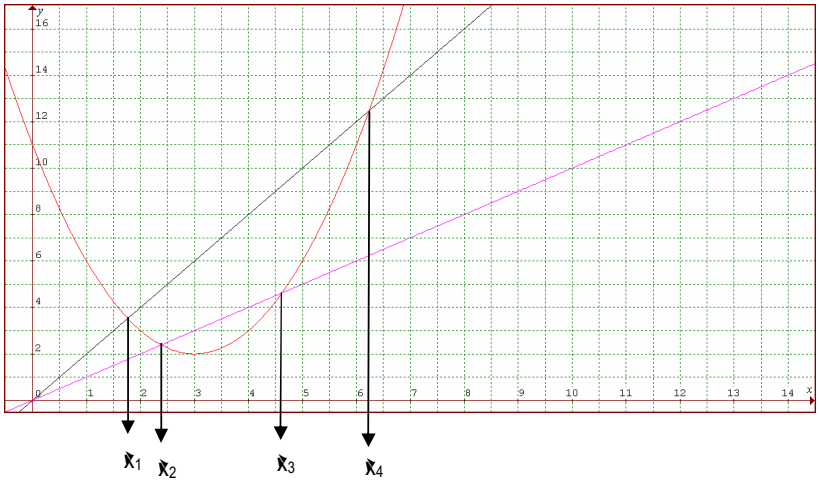
Definición:
"Todo corte de una recta sobre los ejes o entre una recta y un plano".[3]

Las cuatro intersecciones son:

	Eje X	Eje Y
1	1.76	3.53
2	2.38	2.38
3	4.62	4.62
4	6.24	12.5

[3] VALIENTE BARDERAS, Santiago. Diccionario de Matemáticas. Pearson 1998. Página 134.

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com



$$S_L = x_2 - x_1 = 2.38 - 1.76 = 0.62$$
$$S_R = x_4 - x_3 = 6.24 - 4.62 = 1.62$$
$$D = |S_L - S_R| = |x_2 - x_1 - (x_4 - x_3)| = |x_2 - x_1 - x_4 + x_3| = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |7.00 - 8.00|$$
$$D = |-1.00| \longleftrightarrow$$ Valor absoluto de un número real.
$$D = 1.00$$

Apartado 2.

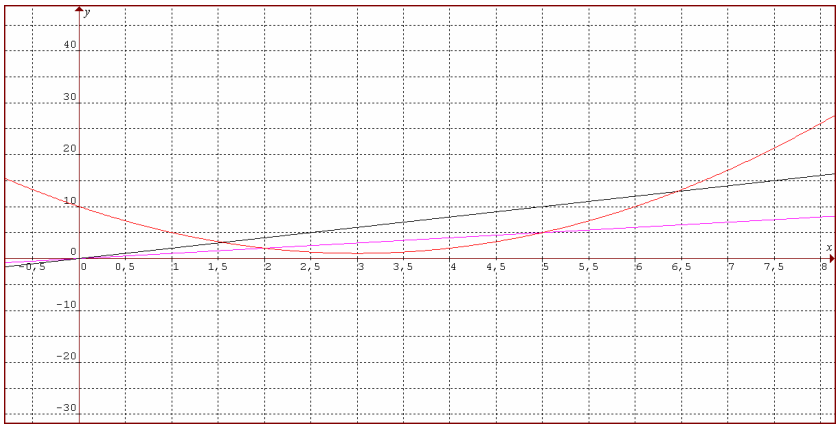
Tiene el valor de D para otras parábolas de la forma y = ax² + bx + c, a>0, y que tengan el vértice en el primer cuadrante, cuando se cortan con las rectas y = x e y = 2x. Considere diversos valores de a, empezando por a = 1. Formule una conjetura acerca del valor de D para estas parábolas.

A = 1

Vértices

1	(3, 1)
2	(4, 0)
3	(3, 3)

1-

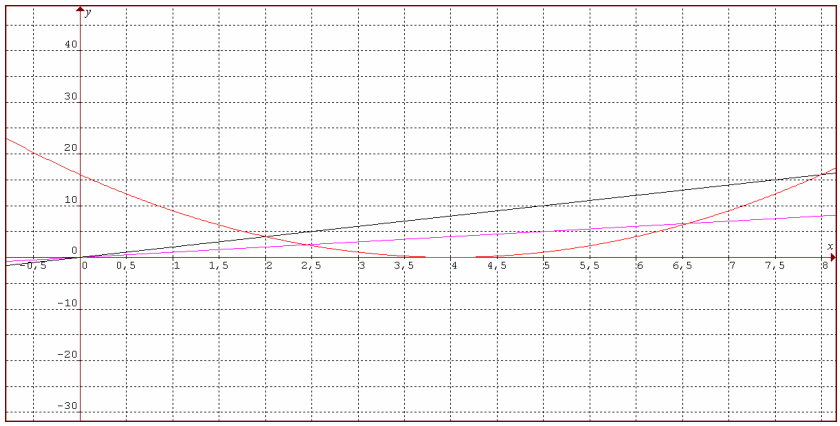


Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

	Eje X	Eje Y
1	1.55	3.10
2	2.00	2.00
3	5.00	5.00
4	6.45	12.9

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |7.00 - 8.00| = |-1.00|$$
$$D = 1.00$$

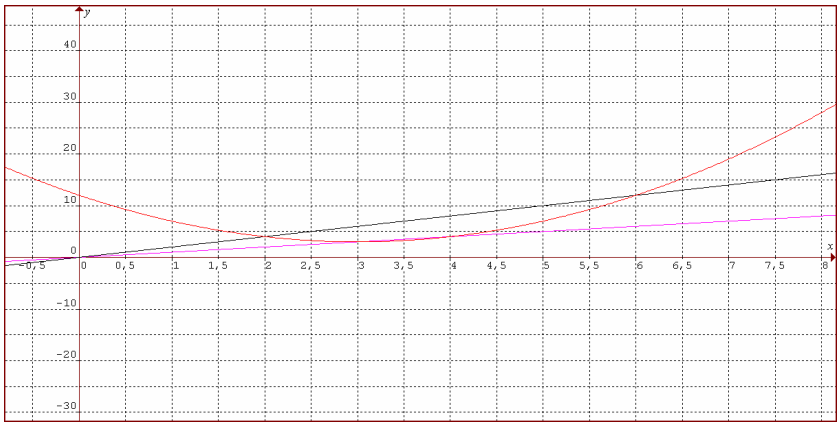
2-



	Eje X	Eje Y
1	2.00	4.00
2	2.44	2.44
3	6.56	6.56
4	8.00	16.0

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |9.00 - 10.0| = |-1.00|$$
$$D = 1.00$$

3-



Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

	Eje X	Eje Y
1	2.00	4.00
2	3.00	3.00
3	4.00	4.00
4	6.00	12.0

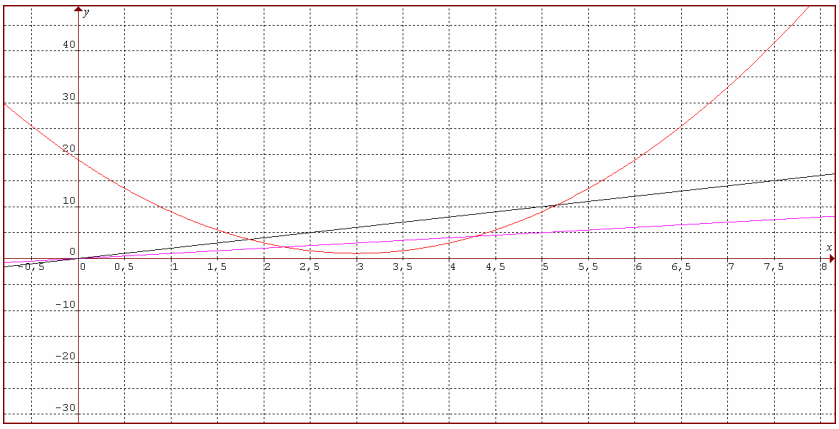
$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |7.00 - 8.00| = |-1.00|$$
$$D = 1.00$$

A = 2

Vértices

1	(3, 1)
2	(4, 0)
3	(3, 3)

1-

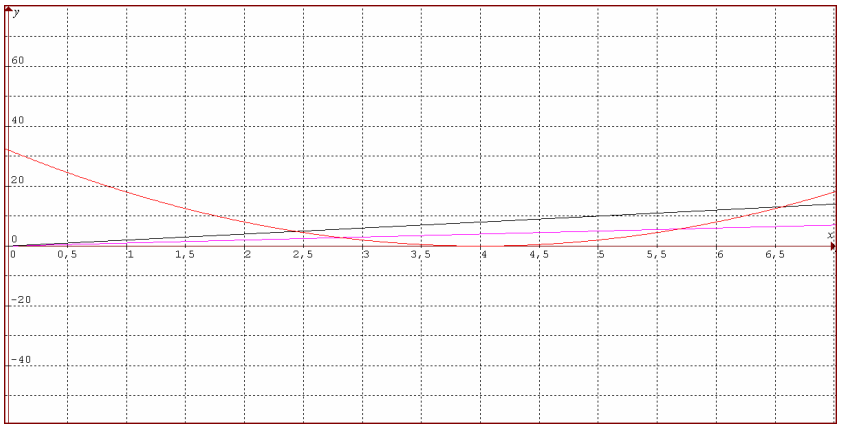


	Eje X	Eje Y
1	1.84	3.68
2	2.22	2.22
3	4.28	4.28
4	5.16	10.3

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |6.50 - 7.00| = |-0.50|$$
$$D = 0.50$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

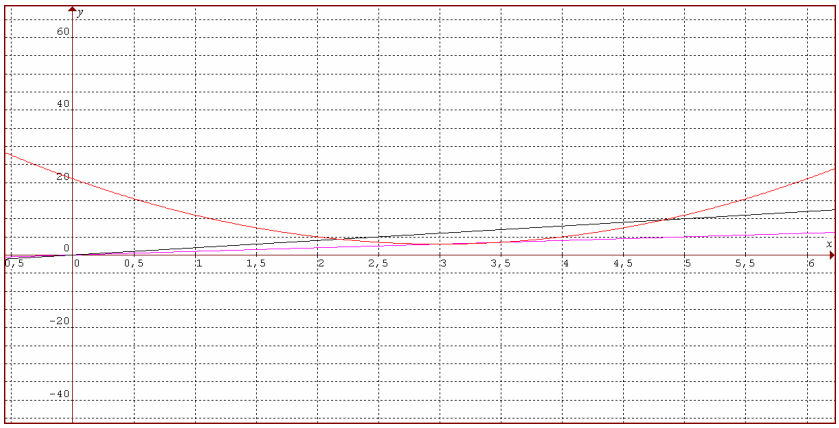
2-



	Eje X	Eje Y
1	2.44	4.88
2	2.81	2.81
3	5.69	5.69
4	6.56	13.1

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |8.50 - 9.00| - |-0.50|$$
$$D = 0.50$$

3-



	Eje X	Eje Y
1	2.18	4.35
2	3.00	3.00
3	3.50	3.50
4	4.82	9.65

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |6.50 - 7.00| = |-0.50|$$
$$D = 0.50$$

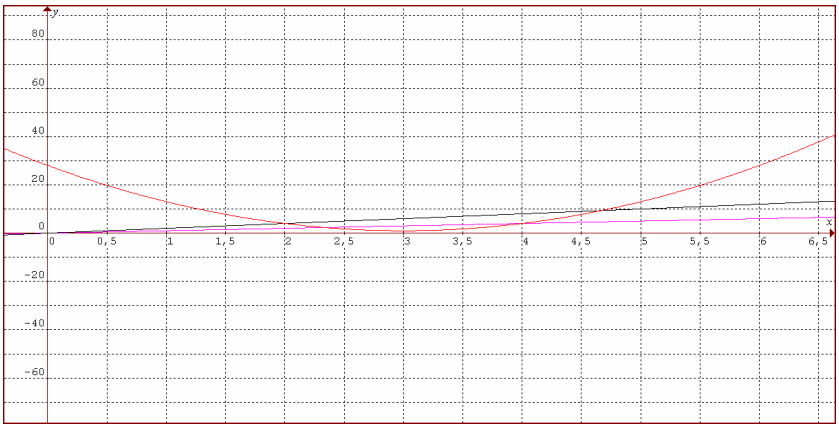
Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

A = 3

Vértices

1	(3, 1)
2	(4, 0)
3	(3, 3)

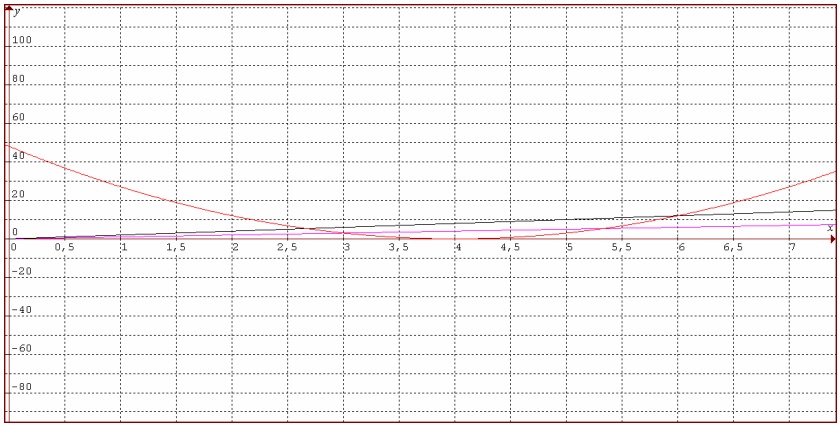
1-



	Eje X	Eje Y
1	2.00	4.00
2	2.33	2.33
3	4.00	4.00
4	4.67	9.33

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |6.33 - 6.67| = |-0.34|$$
$$D = 0.34$$

2-

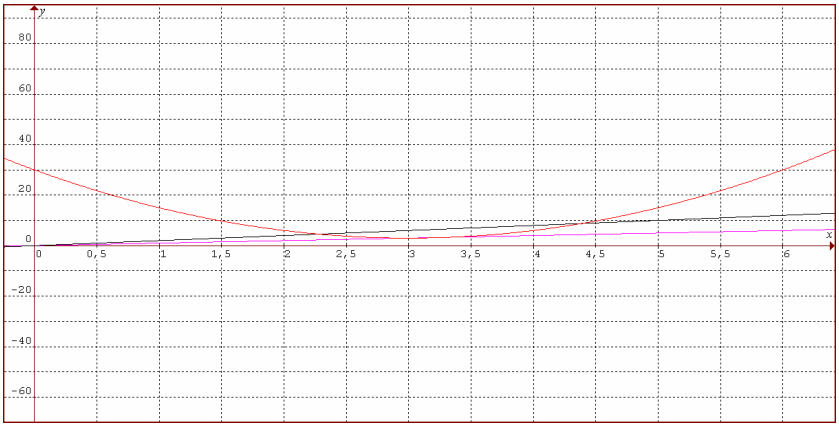


Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

	Eje X	Eje Y
1	2.67	5.33
2	3.00	3.00
3	5.33	5.33
4	6.00	12.0

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |8.33 - 8.67| = |-0.34|$$
$$D = 0.34$$

3-



	Eje X	Eje Y
1	2.28	4.56
2	3.00	3.00
3	3.33	3.33
4	4.39	8.78

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |6.33 - 6.67| = |-0.34|$$
$$D = 0.34$$

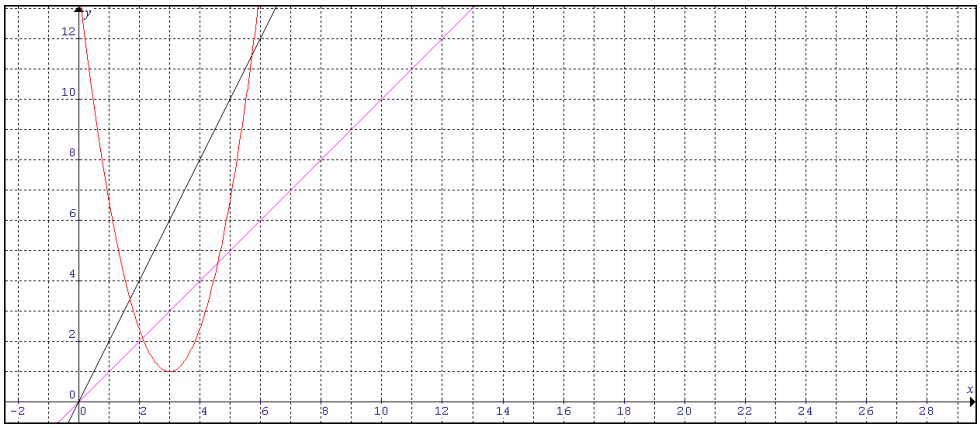
A = $\sqrt{2}$

Vértices

1	(3, 1)
2	(4, 0)
3	(3, 3)

1-

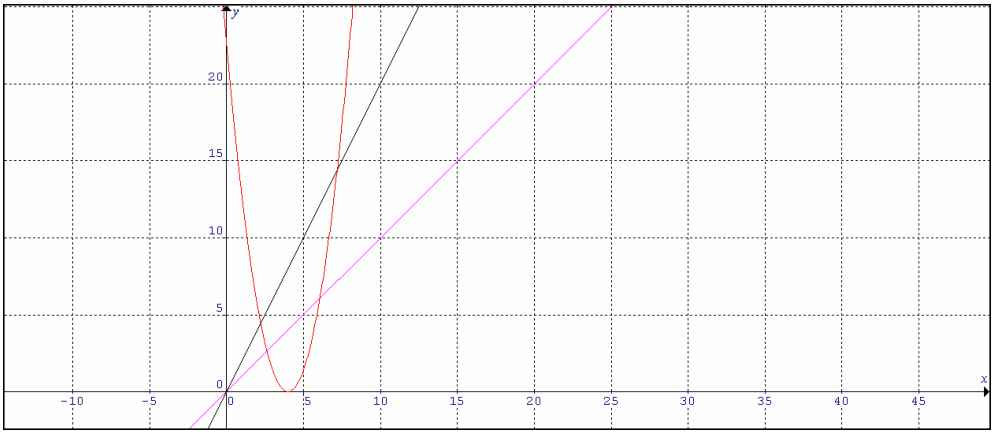
Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com



	Eje X	Eje Y
1	1.69	3.39
2	2.11	2.11
3	4.60	4.60
4	5.72	11.4

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |6.71 - 7.41| = |-0.70|$$
$$D = 0.70$$

2-



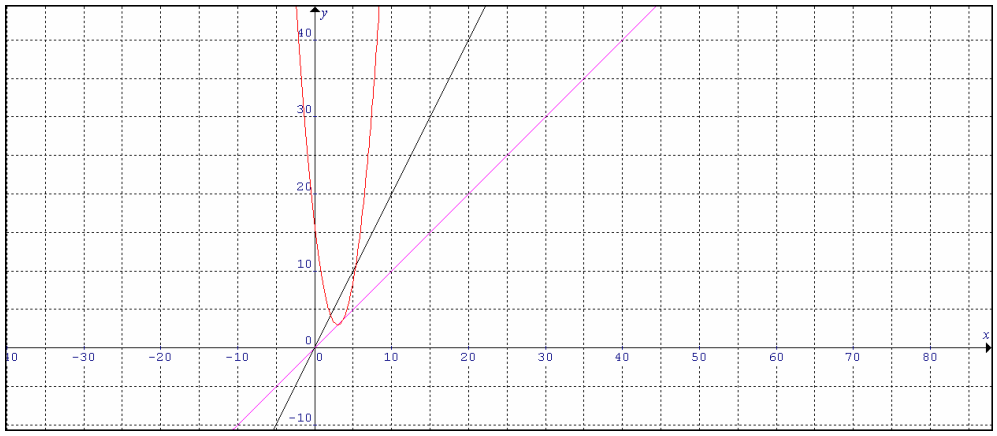
	Eje X	Eje Y
1	2.19	4.52
2	2.60	2.60
3	6.10	6.05
4	7.21	14.4

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

$$D = |8.70 - 9.40| = |-0.70|$$
$$D = 0.70$$

3-



	Eje X	Eje Y
1	2.09	4.17
2	3.00	3.00
3	3.71	3.71
4	5.34	10.7

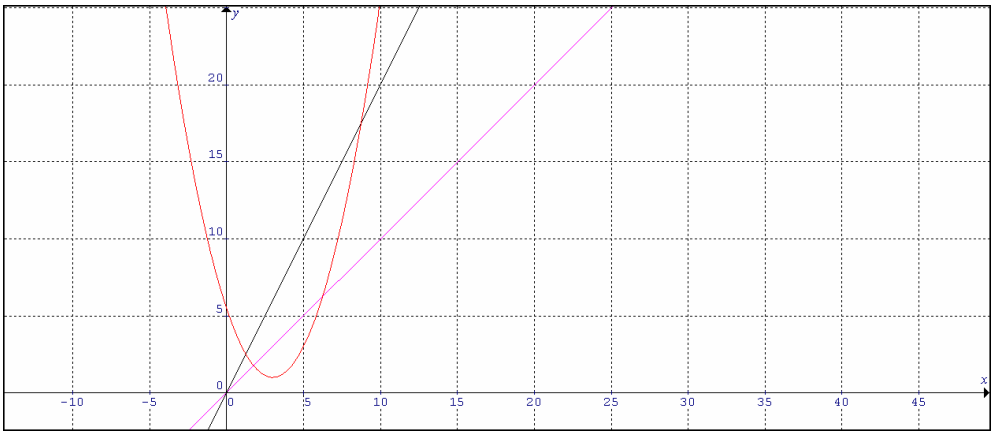
$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |6.71 - 7.41| = |-0.70|$$
$$D = 0.70$$

A = ½

Vértices

1	(3, 1)
2	(4, 0)
3	(3, 3)

1-

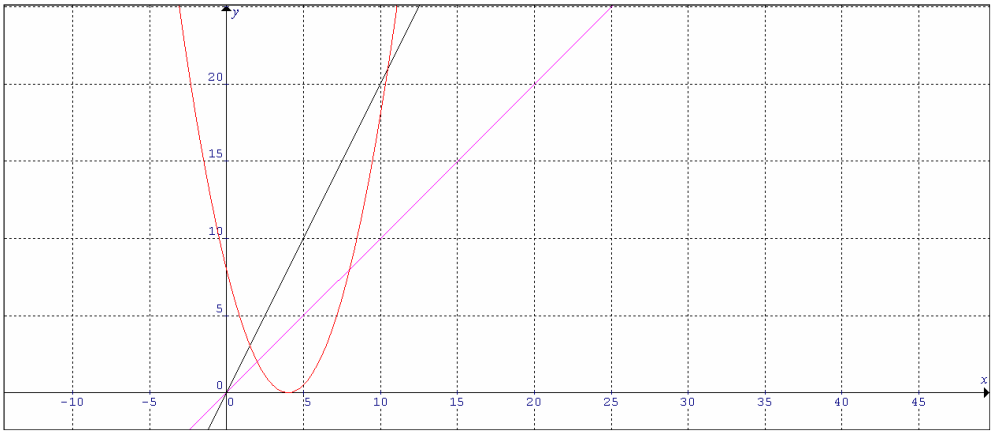


Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

	Eje X	Eje Y
1	1.27	2.52
2	1.73	1.73
3	6.23	6.23
4	8.69	17.4

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |7.92 - 9.96| = |-2.00|$$
$$D = 2.00$$

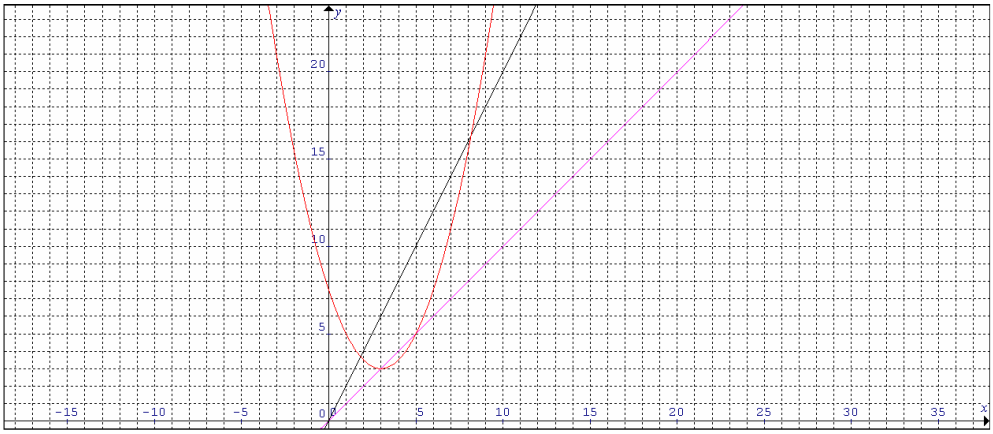
2-



	Eje X	Eje Y
1	1.50	2.98
2	2.00	2.00
3	8.00	8.00
4	10.5	21.0

$$D = |(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)|$$
$$D = |10.0 - 12.0| = |-2.00|$$
$$D = 2.00$$

3-



Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

	Eje X	Eje Y
1	1.85	3.72
2	3.00	3.00
3	5.00	5.00
4	8.15	16.3

$$D = \left|(x_2 + x_3) - (x_1 + x_4)\right|$$
$$D = \left|8.00 - 10.0\right| = \left|-2.00\right|$$
$$D = 2.00$$

Apartado 3.

Investigar y comprobar si se cumple las conjeturas para cualquier valor real de a y para cualquier posición de vértice. Mejore su conjetura como sea necesario, y demuestre la. Mantenga la misma convención para notar los puntos como en el apartado 1 y 2, llamando a las intersecciones con la recta y = x, x_2 y x_3 y a las intersecciones con la recta y = 2x, x_1 y x_4.

Para realizar esta investigación es necesario saber determinados datos sobre los polinomios cuadráticos.

[4]El polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ tiene discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, que es la cantidad bajo el signo de la raíz cuadrada en la fórmula de la solución de la ecuación de segundo grado. Dados los números reales a, b, c, se tiene:

- Cuando $\Delta > 0$, $P(x)$ tiene dos raíces reales distintas, y su representación cruza el eje de las abscisas dos veces.
- Cuando $\Delta = 0$, $P(x)$ tiene dos raíces coincidentes reales, y su representación es tangente al eje de abscisas.
- Cuando $\Delta < 0$, $P(x)$ no tiene raíces reales y su representación queda estrictamente por encima o por debajo del eje de abscisas. En este caso, $P(x)$ tiene dos raíces complejas distintas.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Primero haré la generalización para y = x, donde (h ,k) son los vértices.

$$\left.\begin{aligned} y &= a(x-h)^2 + k \\ y &= x \end{aligned}\right\}$$

[4] Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Discriminante

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

$$x = a(x^2 - 2hx + h^2) + k$$
$$x = ax^2 - 2dx + dh^2 + k$$
$$0 = ax^2 - (2dh + 1)x + (dh^2 + k)$$

Yo se que la suma de las raíces es $\frac{-b}{a}$ y que de lo anterior surgen las raíces que son x_2 y x_3, entonces hago lo siguiente.

$$x_2 + x_3 = \frac{2dh + 1}{a} = S_L$$

Ahora hago lo mismo pero para y = 2x.

$$2x = a(x^2 - 2hx + h^2) + k$$
$$2x = ax^2 - 2dx + dh^2 + k$$
$$0 = ax^2 - (2dh + 2)x + (dh^2 + k)$$
$$x_1 + x_4 = \frac{2dh + 2}{a} = S_R$$

Concluyo que:

$$D = |S_L - S_R| = \left|\frac{2dh + 1}{a} - \frac{2dh + 2}{a}\right| = \left|\frac{-1}{a}\right| = \frac{1}{a}$$

Para todos los valores de a › 0

Mediante el discriminante puedo ver las condiciones para que existan los puntos x_1, x_2, x_3 y x_4.

Para y = x.

$$\Delta = -(2dh + 1)^2 - 4a(dh^2 + k) \geq 0$$
$$\Delta = 4dh^2 + 4dh + 1 - 4a^2h^2 - 4dk \geq 0$$
$$\Delta = 4a(h - k) + 1 \geq 0$$
$$a \rangle 0$$
$$\Delta = h - k + \frac{1}{4a} \geq 0$$
$$\Delta = h + \frac{1}{4a} \geq k$$

Condición para que existan los puntos x_2 y x_3.

Para y = 2x.

Marked by Teachers This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

$$\Delta = (2dh + 2)^2 - 4a(dh^2 + k) \geq 0$$
$$\Delta = 4a^2h^2 + 8dh + 4 - 4a(dh^2 + k) \geq 0$$
$$\Delta = 8dh + 4 - 4dk \geq 0$$
$$\Delta = 8dh - 4dk + 4 \geq 0$$
$$\Delta = 4(2dh - dk + 1) \geq 0$$
$$\Delta = 2dh - dk + 1 \geq 0$$

Condición para que existan los puntos x_1 y x_4.

$$\Delta = 2h + k + \frac{1}{a} \geq 0$$
$$\Delta = 2h + \frac{1}{a} \geq k$$

$$h + \frac{1}{4a} + h + \frac{1}{4a} + \frac{1}{2a} \geq k$$

$\geq 2k$

Por lógica, si corta la recta de abajo, corta la recta de arriba.

Apartado 4.

¿Sigue siendo válida esta conjetura si se cambia de rectas de intersección? Modifique su conjetura, si fuera necesario, y demuéstrela.

Para saber si mi conjetura es valida cuando cambio de rectas de intersección, sustituiré $y = x$ por $y = mx$, y $y = 2x$ por $y = m`x$.

Primero trabajare con $y = a(x-h)^2 + k$
$y = mx$

$$a(x-h)^2 + k = mx$$
$$ax^2 - 2dhx + dh^2 + k - mx = 0$$
$$ax^2 - (2dh + m)x + dh^2 + k = 0$$

Como ya sabemos la suma de las raíces es $\frac{-b}{a}$, entonces: $x_2 + x_3 = \frac{2dh + m}{a}$

Ahora trabajare con la siguiente intersección, $y = a(x-h)^2 + k$
$y = m`x$

$$a(x-h)^2 + k = m`x$$
$$ax^2 - 2dhx + dh^2 + k - m`x = 0$$
$$ax^2 - (2dh + m`)x + dh^2 + k = 0$$
$$x_1 + x_4 = \frac{2dh + m`}{a}$$

Concluye que:

$$D = |S_L - S_R| = \left|\frac{2dh + m}{a} - \frac{2dh + m`}{a}\right| = \left|\frac{m - m`}{a}\right|$$

Ejemplo:

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 1 \\ y = 5x \end{cases}$$

$$(x-3)^2 + 1 = 5x$$
$$x^2 - 6x + 9 + 1 - 5x = 0$$
$$x^2 - (6+5)x + 9 + 1 = 0$$

$$\begin{cases} y = (x-3)^2 + 1 \\ y = 8x \end{cases}$$

$$(x-3)^2 + 1 = 8x$$
$$x^2 - 6x + 9 + 1 - 8x = 0$$
$$x^2 - (6+8)x + 9 + 1 = 0$$

$$D = |S_L - S_R| = \left|\frac{6+5}{1} - \frac{6a+8}{1}\right| = \left|\frac{5-8}{1}\right| = |-3| = 3$$

Apartado 5.

Determine si se puede formular una conjetura similar para polinomio de grado tres.

Un polinomio de grado tres:
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Para formular una conjetura similar realizare procedimientos muy parecidos a los anteriores. La conjetura será para cualquier recta que pase por el origen. En el caso del polinomio de grado tres las suma de las raíces es $\frac{-d}{a}$.

Para la suma de las raíces me parece importante destacar que aunque el cero no influye igual decidí ponerlo para que quede mas claro.

La siguiente conjetura es para polinomios de tercer grado sin término independiente.

Primero comenzare con [redacted]

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx \\ y = mx \end{cases}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx = mx$$
$$ax^3 + bx^2 + cx - mx = 0$$
$$x(ax^2 + bx + c - m) = 0$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

$\rightarrow x = 0$

$\rightarrow ax^2 + bx + c - m = 0 \rightarrow x_2$

$\rightarrow ax^2 + bx + c - m = 0 \rightarrow x_3$

$$0 + x_2 + x_3 = \frac{-d}{a}$$

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 + cx \\ y = m'x \end{cases}$$

$ax^3 + bx^2 + cx = m'x$

$ax^3 + bx^2 + cx - m'x = 0$

$x(ax^2 + bx + c - m') = 0$

$\rightarrow x = 0$

$\rightarrow ax^2 + bx + c - m = 0 \rightarrow x_1$

$\rightarrow ax^2 + bx + c - m = 0 \rightarrow x_4$

$$0 + x_1 + x_4 = \frac{-d}{a}$$

$D = 0$

A continuación será con $c = 0$.

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 \\ y = mx \end{cases}$$

$ax^3 + bx^2 = mx$

$ax^3 + bx^2 - mx = 0$

$x(ax^2 + bx - m) = 0$

$\rightarrow x = 0$

$\rightarrow ax^2 + bx - m = 0 \rightarrow x_2$

$\rightarrow ax^2 + bx - m = 0 \rightarrow x_3$

$$0 + x_2 + x_3 = \frac{-d}{a}$$

$$\begin{cases} y = ax^3 + bx^2 \\ y = m'x \end{cases}$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

$$ax^3 + bx^2 = m'x$$
$$ax^3 + bx^2 - m'x = 0$$
$$x(ax^2 + bx - m') = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$
$$\rightarrow ax^2 + bx - m = 0 \rightarrow x_1$$
$$\rightarrow ax^2 + bx - m = 0 \rightarrow x_4$$

$$0 + x_1 + x_4 = \frac{-d}{a}$$

$$D = 0$$

Finalmente será con [redacted] c = [redacted] 0.

$$\begin{cases} y = ax^3 \\ y = mx \end{cases}$$

$$ax^3 = mx$$
$$ax^3 - mx = 0$$
$$x(ax^2 - m) = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$
$$\rightarrow x = x_2$$
$$\rightarrow x = x_3$$

$$0 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\begin{cases} y = ax^3 \\ y = m'x \end{cases}$$

$$ax^3 = m'x$$
$$ax^3 - m'x = 0$$
$$x(ax^2 - m') = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$
$$\rightarrow x = x_1$$
$$\rightarrow x = x_4$$

$$0 + x_1 + x_4 = 0$$

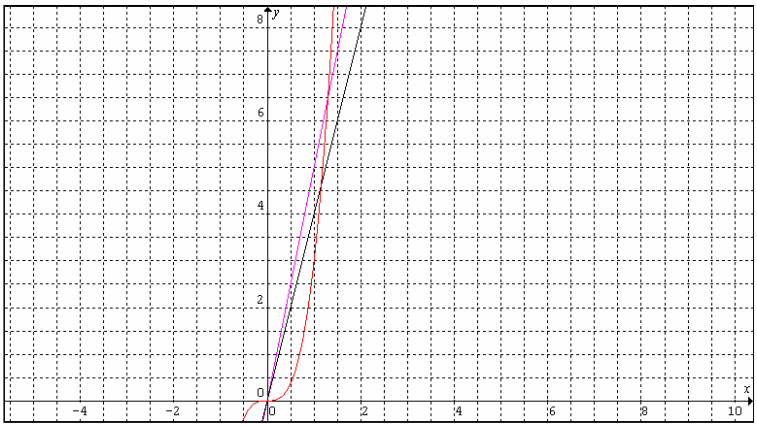
$$D = 0$$

Las raíces son reales.
$0^2 - 4a(-m) \geq 0$
$4am \geq 0$
a y m deben ser del mismo signo.

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Ejemplo:

Realizare un ejemplo para la última conjetura.



$$\begin{cases} y = 3x^3 \\ y = 4x \end{cases}$$

$$3x^3 = 4x$$
$$3x^3 - 4x = 0$$
$$x(3x^2 - 4) = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$
$$\rightarrow x = x_2 = 0$$
$$\rightarrow x = x_3 = 1.15$$

$$0 + x_2 + x_3 = 1.15$$

$$\begin{cases} y = 3x^3 \\ y = 5x \end{cases}$$

$$3x^3 = 5x$$
$$3x^3 - 5x = 0$$
$$x(3x^2 - 5) = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$
$$\rightarrow x = x_1 = 0$$
$$\rightarrow x = x_4 = 1.30$$

$$0 + x_1 + x_4 = 1.30$$

$$D = 0.15$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

A pesar que hay una mínima diferencia siempre tiende a cero.

Apartado 6.

Considere si será posible modificar la conjetura para cualquier polinomios de grado superior.

En este caso he realizado una conjetura para cualquier grado. Aplicando los conocimientos anteriores.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x = mx$$
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (a_1 - m)x = 0$$
$$x\left(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + (a_1 - m)\right) = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$
$$\rightarrow a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + (a_1 - m) = 0 \rightarrow x_1$$
$$\rightarrow a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + (a_1 - m) = 0 \rightarrow x_2$$
$$\rightarrow a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + (a_1 - m) = 0 \rightarrow x_3$$
$$\rightarrow a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + (a_1 - m) = 0 \rightarrow x_{\_}$$
$$\rightarrow a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + (a_1 - m) = 0 \rightarrow x_{n-1}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_{\_} + x_{n-1} = \frac{-a_{n1}}{a_n}$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Bibliografía

- VALIENTE BARDERAS, Santiago. Diccionario de Matemáticas. Pearson 1998.
- http://es.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1bola_(matem%C3%A1tica).
- http://es.wikipedia.org/wiki/Discriminante