Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Bachillerato Internacional

Matemáticas NM

Evaluación Interna

Investigación matemática

Marked by Teachers

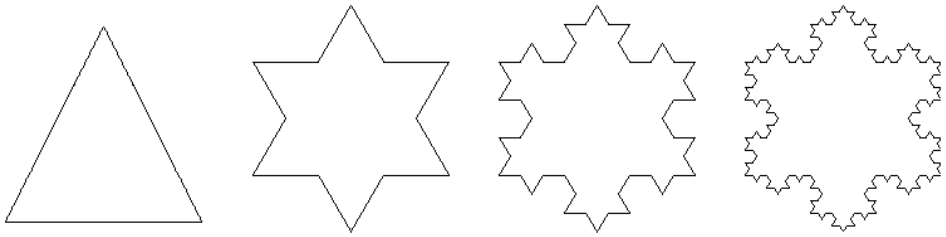
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Tarea de tipo I

El copo de nieve de Koch Tarea de tipo I, NM

Descripción

En 1904 Helge von Koch identificó un fractal que parecía responder al modelo de un copo de nieve. El fractal se construye con un triángulo equilátero; sobre el tercio medio de cada lado se construye otro triángulo equilátero, y se repite el proceso indefinidamente. A continuación se muestra claramente el proceso con el triángulo original en la fase 0 y las figuras resultan tras una, dos y tres iteraciones.



Fase 0 Fase 1 Fase 2 Fase 3

Método

Sea N_n= número de lados, I_n= longitud de un lado, P_n =longitud del perímetro y A_n = área del copo de nieve, en la fase n -ésima.

1. Tomando la longitud inicial del lado igual a 1, elabore una tabla que muestre los valores de N_n,, I_n, P_n y A_n para n=0, 1 , 2 y 3. Utilice valores exactos para los cálculos. Explique la relación entre los términos sucesivos de la tabla para cada cantidad N_n, I_n, P_n y A_n.

2. Mediante una calculadora de pantalla grafica o un paquete de progr amas adecuado, cree las graficas de los cuatro conjuntos de valores determinados según el valor de n. Imprima cada grafica por separado.

3. Para cada una de las gráficas anteriores, elabore un enunciado en función de n que generalice el comportamiento que muestra la grafica. Explique cómo ha llegado a estas generalizaciones. Verifique si las generalizaciones realizadas son coherentes con los conjuntos de valores obtenidos en la tabla.

4. Investigue lo que sucede para $n = 4$. Utilice las conjeturas elaboradas en el paso 3 para obtener los valores de N_4, I_4, P_4 y A_4. Dibuje ahora un diagrama grande de un "lado" (es decir, un lado que ha sido transformado del triangulo original) del fractal en la fase 4 y verifique claramente sus predicciones.

5. Calcule los valores de N_6, I_6, P_6 y A_6. No es necesario que verifique estos resultados.

Marked by Teachers

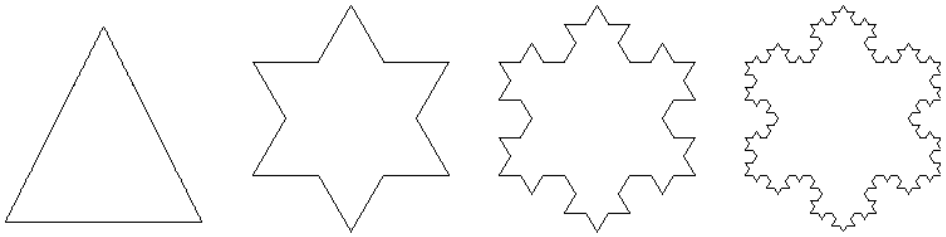
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

6. Escriba los valores sucesivos de A_n en función de A_0. ¿Qué modelo surge?

7. Explique qué le sucede al perímetro y al área cuando n se hace muy grande. ¿Qué conclusión se puede extraer acerca del área cuando $n \to \infty$? Comente los resultados obtenidos.

Tarea tipo I
El copo de nieve de Koch

En 1904 Helge von Koch identificó un fractal que parecía responder al modelo de un copo de nieve. El fractal se construye con un triángulo equilátero; sobre el tercio medio de cada lado se construye otro triángulo equilátero, y se repite el proceso indefinidamente. A continuación se muestra claramente el proceso con el triángulo original en la fase 0 y las figuras resultan tras una, dos y tres iteraciones.



Fase 0 Fase 1 Fase 2 Fase 3

Sea N_n= número de lados, I_n= longitud de un lado, P_n =longitud del perímetro y A_n = área del copo de nieve, en la fase n-ésima. Tomando la longitud inicial del lado igual a 1, se elaborará una tabla que muestre los valores de N_n,, I_n, P_n y A_n para n=0, 1 , 2 y 3.

A través del análisis de las iteraciones de cada fase, se partió a la obtención de los datos con el fin de tabularlos para un mejor análisis, empero primero se debe conocer el concepto de fractal para poder comprender las imágenes y poder obtener resultados.

Se realizo el análisis y la obtención de datos por medio de la obtención y desarrollo de formulas, al crear diferentes modelos, en el caso de N_n, se creo el modelo N= n*4 , esto es porque cada iteración el numero de lados se ve cuadriplicado respectivamente, es por ello que a través de diferentes modelos se llego a resultados. La siguiente tabla muestra un resumen de los resultados de el número de lados, la longitud del lado, el perímetro y área del copo de nieve para n=0, 1 , 2 y 3.

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Tarea de tipo I

Tabla 1. Valores para el número de lados, longitud de un lado, perímetro y área para n=0, 1, 2 y 3

Número de fase	0	1	2	3
N_n	3	12	48	192
I_n	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
P_n	3	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$
A_n	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{11\sqrt{3}}{60}$	$\frac{119\sqrt{3}}{540}$	$\frac{1211\sqrt{3}}{4860}$

En el caso de la obtención del número de lados o N_n, es menester mencionar que se empezó con el análisis de la iteración 0 que nos muestra un triangulo equilátero, el cual se compone por 3 lados con valor de 1 en su longitud.

Se observa cada iteración que el número de lados se ve cuadriplicado en cada fase; esto es porque con cada iteración se remplaza la tercera parte del triángulo con otro triángulo en la misma posición en la cual fue eli minado. Gracias a esto, podemos afirmar que con cada iteración el N_n se ve afectado en un cuádruplo. Esto se ejemplifica de la siguiente manera: tenemos que en la primera iteración, en la fase cero se empieza por un triangulo, por lo tanto consta de 3 lados, esto se expresa de la siguiente manera. Para resolver la 2da iteración, tenemos que partir tomando la primera iteración, por lo tanto obtenemos lo siguiente:

$N_1 = 3 * 4 = 12$ y así sucede con las otras fases:
$N_2 = 12 * 4 = 48$
$N_3 = 48 * 4 = 192$
$N_4 = 192 * 4 = 768$

En cuanto a I_n (Longitud de cada lado), se nos afirma que el valor de cada lado en la fase 0 es de 1. Al analizar los copos vemos que con cada iteración, se disminuye la longitud de cada lado en $\frac{1}{3}$, por lo tanto , cada iteración es reflejo de una repetición en disminución de cada lado es por consecuente que obtenemos lo siguiente:

$$I_1 = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$
$$I_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

$I_3 = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

Con esto se observa la afirmación anterior de la disminución de la longitud de cada lado respectivamente al avance d e cada iteración por un valor de $\frac{1}{3}$.

En cuestión del perímetro, se maneja una lógica semejante, ya que el perímetro es la suma de la longitud de todos los lados, por lo tanto será directamente proporcional al cambio en cada iteración, pero p ara la obtención del perímetro fue necesario obtener el siguiente modelo, se observa un incremento de $\frac{4}{3}$ por cada iteración :

-$P_1 = 12 * \frac{1}{3} = 4$
-$P_2 = 48 * \frac{1}{9} = \frac{16}{3}$
-$P_3 = 192 * \frac{1}{27} = \frac{64}{3}$

Para la obtención de A_n fue necesario la creación de un modelo, a partir del cual se pudiera encontrar el área de cualquier iteración, para esto se utilizo la fórmula del área del triangulo equilátero y se sustituyo con el teorema de Pitágoras, por el cual se llego a la afirmación que con cada iteración el área aumentaba en un $\frac{4}{9}$, y de este resultado se partió para la creación del siguiente modelo, que sirve para sacar el área de la n-ésima iteración:

$$\left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^n\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Por ejemplo en el caso de A_1 se desarrollo de la siguiente manera:

$$A_1 = \left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^1\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 = \left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 = \left\{1 - \left[\frac{12}{45}\right]\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 = \left\{\frac{15}{15} - \left[\frac{4}{15}\right]\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Tarea de tipo I

$$A_1 = \left\{\frac{11}{15}\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 = \frac{11\sqrt{3}}{60}$$

√

A continuación se muestran la gráfica de N_n= número de lados, para n=0, 1 , 2 y 3.

Grafica 1. Numero de lados de las fases n= 0, 1, 2 y 3.

A través del desarrollo de la necesidad de obtener el num ero de lados de la n-ésima iteración, surgió la necesidad de crear un modelo el cual cumpliera con las expectativas de ofrecernos el numero de Lados, en cualquier fase es a partir del análisis de los resultados que se llego al siguiente modelo, el cual se obtuvo al encontrar la relación de que con cada iteración, el numero de lados aumentaba 4 veces su valor:

$N_n = 3 \cdot 4^n$

Mediante el cual se obtuvieron los siguientes resultados al sustituir n con los valores 0,1,2 y 3 respectivamente al número de fase deseada.

$N_0 = 3 \cdot 4^0 = 3 \cdot 1 = 3$

$N_1 = 3 \cdot 4^1 = 3 \cdot 4 = 12$

$N_2 = 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 16 = 48$

$N_3 = 3 \cdot 4^3 = 3 \cdot 48 = 192$

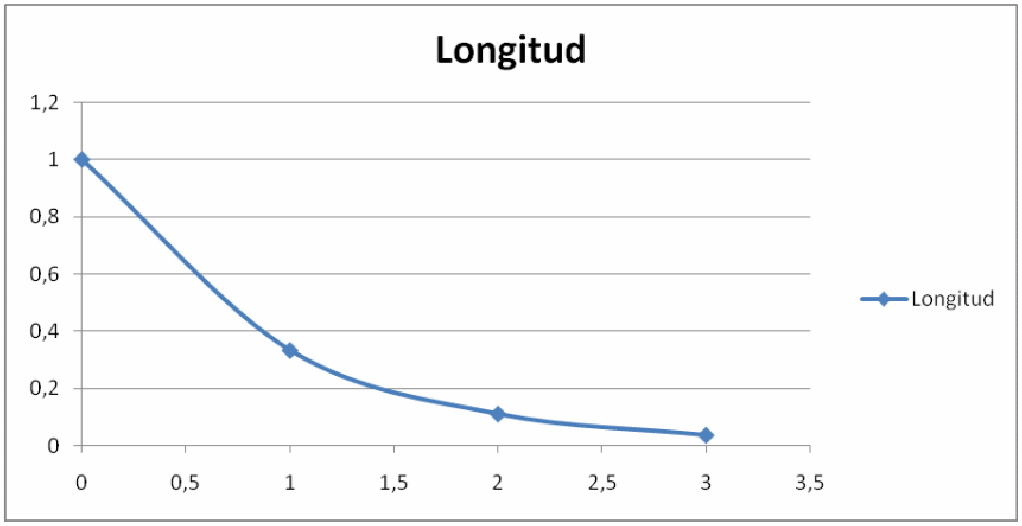
Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Al comparar estos resultados con los de la Tabla 1 (Valores para el número de lados, longitud de un lado, perímetro y área para n=0, 1, 2 y 3"), vemos que son los mismos valores.

Número de fase	0	1	2	3
N_n	3	12	48	192

A continuación se muestran la gráfica I_n= longitud de un lado, para n=0, 1 , 2 y 3.

Grafica 2. Longitud de los lados en las fases n= 0, 1, 2 y 3.



Con el análisis de cada fase pudimos llegar a la conclusión de que cada iteración, la longitud de cada lado se vea reducida en $\frac{1}{3}$, a partir de esto se s multiplico el valor de la fase anterior por $\frac{1}{3}$, para obtener el valor de la longitud de lado de la siguiente fase, gracias a la implementación de este sistema y a la necesidad de crear un modelo matemático que nos proporcione la longitud de cada lado, surgió el siguiente modelo, que cómo antes mencione se toma la variación de $\frac{1}{3}$ y se eleva a la n-ésima que será sustituida por el numero de fase:

$$I_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

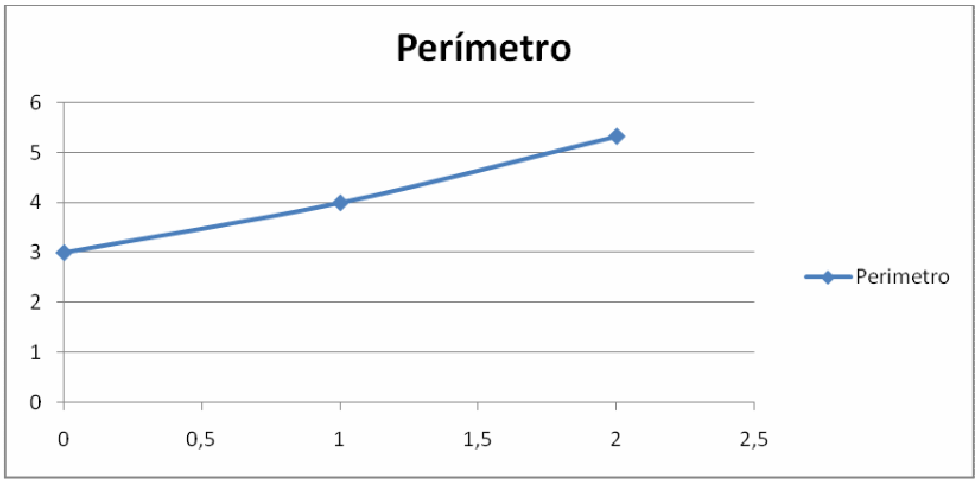
Con la implementación de este modelo se obtuvieron los siguientes resultados:

$$I_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$
$$I_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$$
$$I_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$
$$I_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Lo que concuerda con los datos de la Tabla 1.

Número de fase	0	1	2	3
I_n	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

A continuación se muestran la gráfica de P_n =longitud del perímetro, para n=0, 1 , 2 y 3.
Grafica 3. Muestra el perímetro de las fases n= 0, 1, 2 y 3.



Para la obtención del perímetro se creó un sistema el cual consta en multiplicar $N_n \cdot I_n$; empero como en los casos anteriores fue necesario la creación de un modelo matemático para la obtención del perímetro en cualquiera iteración, con el primer sistema surgió que con cada iteración el perímetro aumentaba $\frac{4}{3}$, y conociendo que la fase inicial tenía 3 lados fue como a partir de un desarrollo surgió el siguiente modelo matemático :

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Tarea de tipo I

$$P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Con la aplicación de este modelo obtuvimos los siguientes resultados:

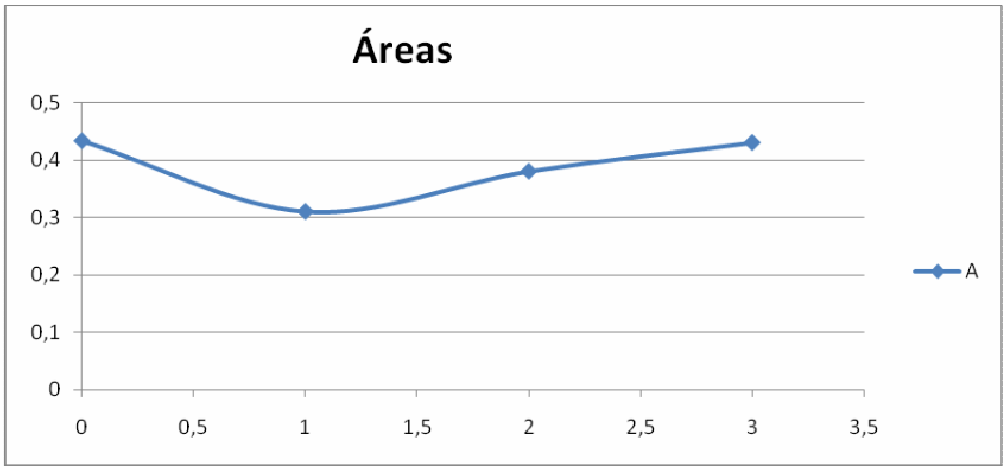
$$P_0 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 3$$
$$P_1 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{12}{3} = 4$$
$$P_2 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$$
$$P_3 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{192}{27} = \frac{64}{9}$$

Que al comparar los resultados con la tabla inicial obtuvimos los mismos valores , por lo tanto el modelo es válido.

Número de fase	0	1	2	3
P_n	3	4	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$

A continuación se muestran la gráfica de A_n = área del copo de nieve, para n=0, 1 , 2 y 3.

Grafica 4. Área de las fases n= 0, 1, 2 y 3.



Fue necesario la creación de un modelo matemático que a partir de este pudiéramos encontrar el área de cualquier iteración en cualquier fase para ello se tomo, la formula fundamental del área del triangulo equilátero y a

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

través de un despeje matemático, se creó un modelo en la sustitución del teorema de Pitágoras y la formula del Área del triangulo.

Para la obtención del mismo se siguió el siguiente proceso:

$$An-1+\frac{1}{3}N_nL_n^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=An-1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=\left\{1-\frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^n\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Mediante este modelo se obtuvieron los valores de las áreas de cada fase que se representan a continuación:

$$A_0=\left\{1-\frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^0\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1=\left\{1-\frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^1\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{11\sqrt{3}}{60}$$

$$A_2=\left\{1-\frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^2\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{119\sqrt{3}}{540}$$

$$A_3=\left\{1-\frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^3\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1211\sqrt{3}}{4860}$$

$$A_4\left\{1-\frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^4\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{32037\sqrt{3}}{131220}$$

√ Para encontrar los valores de N_n,, I_n, P_n y A_n para n=4 se utilizaron los modelos matemáticos respectivamente para la obtención de los siguientes resultados :

$$N_4=3\cdot 4^4=3\cdot 256=768$$

$$I_4=\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

$$P_4=3\left(\frac{4}{3}\right)^4=\frac{256}{27}$$

$$A_4\left\{1-\frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^4\right\}\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{32037\sqrt{3}}{131220}$$

Marked by Teachers
This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

Diagrama 1. (Un lado de la Fase 4)

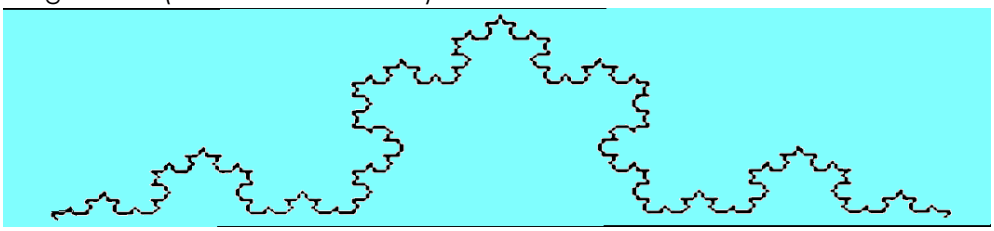


Tabla 2. Fase 4

Fase 4	4
N_4	768
I_4	$\frac{1}{81}$
P_4	$\frac{256}{27}$
A_4	$\frac{32037\sqrt{3}}{131220}$

Para encontrar los valores de N_n,, I_n, P_n y A_n para n=4 se utilizaron los modelos matemáticos respectivamente para la obtención de los siguientes resultados :

$$N_6 = 3 \cdot 4^6 = 3 \cdot 2096 = 12{,}288$$

$$I_6 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$$

$$P_6 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^6 = \frac{4096}{243}$$

$$A_6 = \left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^6\right\}\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{97391\sqrt{3}}{393660}$$

Tabla 3. Fase 6

Fase 6	6
N_6	12,288
I_6	$\frac{1}{729}$
P_6	$\frac{4096}{243}$
A_6	$\frac{97391\sqrt{3}}{393660}$

A través del modelo del Área propuesto con anterioridad se buscara las sucesiones a partir de A_0:

Marked by Teachers

This document was downloaded from www.markedbyteachers.com

$$A_0 = \left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^0\right\} A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.43$$

$$A_1 = \left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^1\right\} A_0 = \frac{11\sqrt{3}}{60}(A_0) = 0.13$$

$$A_2 = \left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^2\right\} A_0 = \frac{119\sqrt{3}}{540}(A_0) = 0.16$$

$$A_3 = \left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^3\right\} A_0 = \frac{1211\sqrt{3}}{4860}(A_0) = 0.18$$

$$A_4 = \left\{1 - \frac{3}{5}\left[\frac{4}{9}\right]^4\right\} A_0 = \frac{32037\sqrt{3}}{131220}(A_0) = 0.18$$

√

Con el desarrollo del presente trabajo he podido concluir que las iteraciones cuentan con un área finita, sin embargo un perímetro infinito, el área será proporcional, pero de acuerdo a los copos de Koch los fractales son repeticiones infinitas, por lo tanto resulta que cuando el área tiende a ser infinita y se reflejara en el siguiente modelo matemático:

$$A\infty = \frac{8}{5} A_0 = \frac{8\sqrt{3}}{20}$$

√